

ÉRTEKEZÉSEK

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

XV. KÖTET. 4. SZÁM.

FOLYADÉK-SUGARAK.

RÉTHY MÓR

L. TAGTÓL.

(OLVASTATOTT A III. OSZTÁLY ÜLÉSÉN 1893. DECEMBER 11-ÉN.)

Ára 50 kr.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1894.

Eddig külön megjelent

ÉRTÉKEZÉSEK

a matematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet.

Ötödik kötet.

M. ACADEMIA
KÖNYVTÁRA

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitív pályaszámítása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignác* kir. observátorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido*. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos*. A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós*. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós*. Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós*. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositio után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós*. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós*. A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő*. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós*. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László*. Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos*. Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetítésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor*. Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós*. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós*. Adatok Jupiter és Mars fizikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór*. A fény törése és visszaverése homogen isotrop átlátszó testek határára. Neumann módszerének általánosításával és bővítésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór*. A sarkított fényrezgés elhajlító rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán*. A telített gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyady Jenő*. Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő*. Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor*. Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr. XXI. *Hunyady Jenő*. Tételek a componált determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula*. A racionalis függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon*. Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János*. A Steiner-féle kritériumról a kúp-

ÉRTEKEZÉSEK

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐI

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

M. ACADEMIA
KÖNYVTÁRA

FOLYADÉK-SUGARAK.

RÉTHY MÓR I. t.

(Olvastatott a III. osztály ülésén 1893. decz. 11.)

A folyadéksugarak alakjára vonatkozó vizsgálatokra azon törvények keresése vezetett, melyek szerint a folyadékok adott edényből, csőből vagy csatornából kiömlenek. Be kell vallani, hogy a vizsgálatok még csak a legelején vannak. A folyadéksugarak alakjára vonatkozó összes elmélet csak lehetséges *stationär* áramlások konstruálására szorítkozik, tehát olyanokéra, melyek öröktől fogva olyanok voltak és örökké olyanok lesznek, a milyenek mostan. Az elmélet további feltevései:

1. hogy a folyadék *összenyomhatatlan*;
2. hogy a folyadék mozgására *nincsen befolyása* sem a részek kölcsönös *surlódásának*, sem a *nehézségi erőnek*;
3. hogy az áramlás *parallel síkmetszetekben kölcsönösen egybevágó*; végül
4. hogy a mozgásnak van *sebesség-potenciálja*.

HELMHOLTZ volt az első, kinek e föltevések mellett sikerült a szabad határokkal is bíró áramlásnak egy esetét leírni. KIRCHHOFF csakhamar még négy speciálesetet írt le részletesen, míg 1876-ban megjelent «Mechanika»-jában megmutatta, hogy a felsorolt föltevések mellett a probléma benne foglaltatik a konform leképezés általános problémájában. De több esetet nem

írt le itten, és azóta se íratott le tudtommal új áramalak részletesen. Kiemeli ezt AUERBACH is*, ki HELMHOLTZ és KIRCHHOFF vizsgálatait idézett helyen ismertetvén, egy általánosabb esetben a kontrakció törvényére egy igen egyszerű formulát ír fel bizonyítás nélkül.

Jelen dolgozat feladata új áramalakok meghatározása a konform leképezés módszerével. Meghatároztam többek között a kontrakció törvényét az AUERBACH esetében is; a törvény azonban (I. XI—XII.) lényegesen különbözvén AUERBACH törvényétől, ezt hipotétikusnak kell tartanom.

A meghatároztam új áramalakok egy részét ábrákkal illusztrálom. Az áramlást határoló falak vastag vonalakkal, a folyadéksugarak szabad határai vékony vonalakkal vannak feltüntetve. Az itt közölt ábráknak is csak egy része tart pontosságra számot, t. i. a 6. kivételével az 1—8. ábrák, melyeket BEKE JÓZSEF állami mérnök úr volt szives a szövegben előadandó integrálok grafikai meghatározásával megszerkeszteni, és a kinek e fáradságos munkájáért ezennel nyilvánosan köszönetet mondok. A többi ábrák csak a szöveget illusztráló *vázlatoknak* tekintendők.

*

Csatlakozván KIRCHHOFF** vizsgálataihoz, jelöléseit is megtartom; úgy hogy jelölöm az áramsík változó pontjának koordinátáit x, y -nal, e pontban a recziprok sebesség komponenseit ξ, η -val, a pontban találkozó áramgörbe és nivógörbe egyenleteit $\psi = \text{const.}$ és $\varphi = \text{const.}$ -sal. Hasonlóképen i -vel a képzetes egységet jelölvén, legyen

$$z = x + yi; \quad \zeta = \xi + \eta i; \quad w = \varphi + \psi i, \quad (1)$$

hol a ξ, η és φ, ψ értelménél fogva a z, ζ és w között ez az összefüggés áll fenn:

$$\zeta = \frac{dz}{dw}. \quad (2)$$

* WINKELMANN, Handbuch der Physik, pag. 419. I. kötet.

** Mathematische Physik, 1876, pag. 273—307.

1. §. Az áram véges szélességű; a gát keresztmetszete egyenes vonaldarab.

I. A ζ és w komplex mennyiségek képsíkjai között itten a következő egyenlet állapítsa meg az összetartozást:

$$\left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\right)^2 = k^2 (1-e^w), \quad (3)$$

hol k reális szám és > 1 . Ez egyenletnél fogva az a ζ -tartomány (1b. ábra), mely az egységsugarú (34), illetve végtelen-nagy sugarú (55) körnegyedektől határoltatik egyrészről, és a (45) meg (53) sugárdaraboktól másrészről, arra a w -tartományra (parallelszalagra) (1a. ábra) képeztek le egyértékűleg és legkisebb részekben hasonló módon, mely a $\phi = 0$ és $\phi = \pi$ egyenesek között terül el. Összetartozó pontjaik többek között a következő három pár:

$$\begin{aligned} w_1 &= -\infty, & w_4 &= 0, & w_3 &= +\infty, \\ \zeta_1 &= -i \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}}, & \zeta_4 &= +1, & \zeta_3 &= -i. \end{aligned} \quad (4)$$

A (3) egyenletről mondottaknak az igazolására szolgáljanak e következők. A

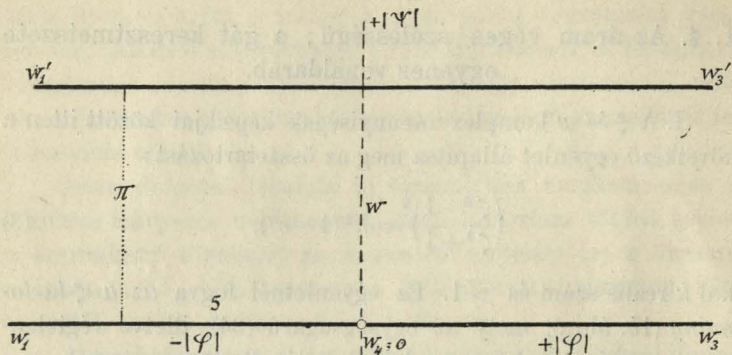
$$\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2 = k^2 (1-e^w)$$

vonatkozás szerint a leírt w -síkbeli parallelszalagra egyértékűleg leképeztek az a Z -síkbeli tartomány (1c. ábra), mely egyrészről az egységsugarú (34) és végtelensugarú (55) félköröktől, másrészről (45) és (53) sugárdaraboktól határoltatik; míg a

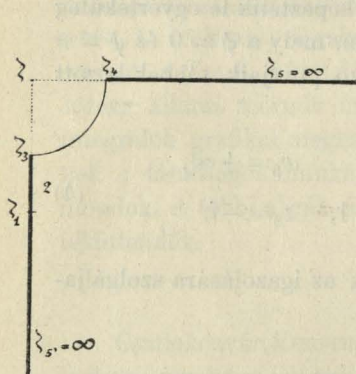
$$Z = \zeta^2$$

egyenlet a ξ, η tengelyek közötti egy-egy *síknegyed* egyértékűleg képezi le a Z síkon az X tengelytől határolt egy-egy *fél-sík*ra. A (4) alatti összetartozóságot végül behelyettesítés által közvetlenül igazolhatni.

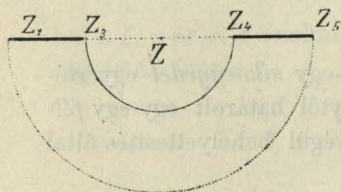
Fordítva a w -tartomány mindegyik pontjához is a ζ -tartomány egyetlen egy pontját fogjuk sorolni



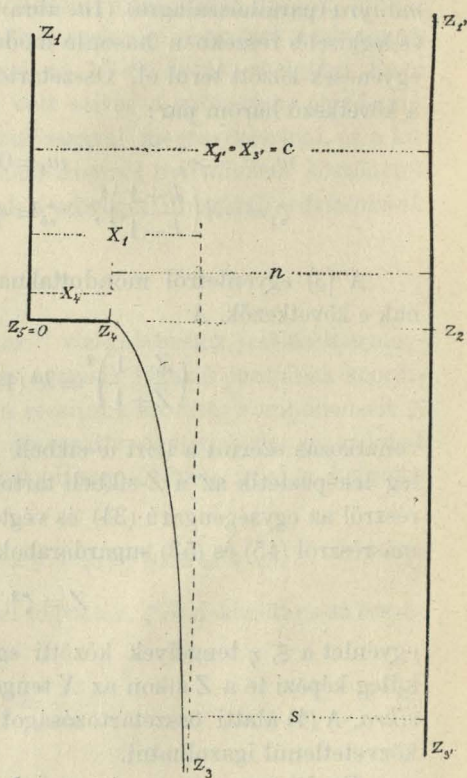
1a. ábra.



1b. ábra.



1c. ábra.



1d. ábra.

$$(k = 2, c = \sqrt{3}, s = 1, x_4 = 0.34, n = 1.383.)$$

$$u = k \sqrt{1 - e^w}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \quad (5)$$

egyenletek erejénél fogva, ha megállapítjuk, hogy

$$w = -\infty, \quad u = k, \quad \zeta = -i \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

összetartozó pontok legyenek. Ugyanis evvel a gyökjelek ezekben a pontokban és azért a folytonosság elve szerint az egész ζ és w -tartományokban is egyértékűleg megállapítvák.

A z -tartomány határai ezek után kiadódnak a (2)-ből folyó ezen integrálból:

$$z = \int_1^u \zeta \frac{dw}{du} du,$$

amely az (5) egyenleteknél fogva így írható:

$$z = 2 \int_1^u \frac{u^2 + u}{u^2 - k^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}; \quad (6)$$

e szerint a $z = 0$ kezdőponthoz az u -tartomány határán fekvő $u = 1$ pont soroltatik, minél fogva (5) értelmében a $z = 0$ pontban $\zeta = \infty$ lévén, benne a folyadék *sebessége* = 0.

a) Ha u reális úton k -tól fogy 1-ig, akkor ζ és z tiszta képzetes, pontosabban

$$k \geq u \geq 1, \quad \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq |\zeta| \leq \infty, \quad \infty \geq |z| \geq 0.$$

β) Ha u tovább fogy reális úton 0-ig, akkor ζ és z reálisok, és pontosan

$$1 \geq u \geq 0, \quad \infty \geq \zeta \geq 1, \quad 0 \leq z \leq z_4$$

tartományok felelnek meg egymásnak, hol

$$z_4 = 2 \int_0^1 \frac{u^2 + u}{k^2 - u^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (6a)$$

γ) Ha u a 0-ponttól kezdve képzetes úton nő ∞ -ig, akkor a ζ komplex és abszolút értékére nézve állandóan = 1; a z is komplex és végtelenbe növe.

És a míg az u az α), β) és γ) alatt részletezett utakat be-
futja, addig a w áthalad az összes reális értékek tartományán
— ∞ -tól + ∞ -ig.

Az α) és β) alatt leírt, z -tartományhoz tartozó, határvona-
lak, (tekintettel, hogy a ζ reciprok-sebesség abszolút értéke
bennük nem állandó), a folyadéknak csak *szilárd falul* szolgál-
hatnak; a képzetes úton a végtelenbe növe u -nak ellenben
 $|\zeta| = 1$ — azaz abszolút értékre nézve állandó sebesség —
felelve meg, a segélyével leírt z -tartományi határvonal a folya-
déknak *szabad határai* lehetnek.

Az $u = -iv$ helyettesítés, melyben v reális pozitív érték,
a szabad határ analitikai előállítására vezet. Ugyanis

$$z = z_4 + 2 \int_0^u \frac{u^2 + u}{u^2 - k^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

azaz

$$z = z_4 - 2 \int_0^v \frac{v^2 + iv}{v^2 + k^2} \frac{idv}{\sqrt{1 + v^2}},$$

honnan ketté választással következik

$$x = z_4 + 2 \int_0^v \frac{v dv}{(v^2 + k^2) \sqrt{1 + v^2}},$$

$$y = -2 \int_0^v \frac{v^2 dv}{(v^2 + k^2) \sqrt{1 + v^2}},$$

azaz

$$\begin{aligned} x &= z_4 + \frac{2}{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\text{arc. tg.} \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \text{arc. tg.} \frac{1}{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right), \\ y &= -2 \text{ l. } (v + (1 + v^2)^{\frac{1}{2}}) + \frac{k}{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{ l. } \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1 - k^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + v(1 - k^{-2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ha v nő 0-tól ∞ -ig, akkor ez az x, y pont leírja a folyadék
szóban levő *szabad határát*. E görbének aszimptotául szolgál
az y -tengelyhez párhuzamos egyenes

$$x = z_4 + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc. cos.} \frac{1}{k} = x'_3, \quad (7a)$$

mely abszcissa-érték a görbe $v = \infty$ pontjához tartozik.

δ) Ha $\varphi = \infty$, és ψ nő 0-tól π -ig, akkor y egyenlő marad egy végtelen nagy állandóval és x nő x'_3 -től a következő értékig:

$$x_3 = x'_3 + \int_0^{i\pi} \zeta dw = x'_3 + \pi. \quad (8)$$

ε) Ha $\psi = \pi$, a φ pedig bármekkora reális érték, akkor

$$u = k(1 + e^{\varphi})^{\frac{1}{2}},$$

azaz u reális és > 1 , minél fogva a ζ tiszta képzetes és abszolút értékére fogy az 1-től, mely értéket $\varphi = \infty$ pontban vesz fel, $(k+1)^{\frac{1}{2}} : (k-1)^{\frac{1}{2}}$ értékig, melyet $\varphi = -\infty$ -nél ér el. Azért is a z pont leírja az y -tengelyhez parallel, kétfelé végtelen, $x = x_3$ egyenest, mely a folyadéknak megint *szilárd falul* szolgál.

ε) Ha végül $\varphi = -\infty$ és $0 < \psi < \pi$, akkor $u = k$, tehát

$$\zeta = -i \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

minél fogva a z pont leír egy az x -tengelyhez parallel vonal-darabot $x = 0$ -tól $x = x_1$ -ig, hol is

$$x_1 = \int_0^{i\pi} \zeta dw = -i \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} i d\psi$$

azaz

$$x_1 = \pi \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

A (8) és (9) összehasonlításából látjuk, hogy $x_1 = x_3$, miért is a (8) és (7a) fölhasználásával a z_4 érték meghatározható; belőlük ugyanis ered

$$\pi \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} = z_4 + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc. cos.} \frac{1}{k} + \pi,$$

honnan

$$z_4 = \pi \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} - \pi - \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc. cos.} \frac{1}{k}, \quad (10)$$

mely eredmény a (6a) alattival megegyez.

Elvél meg vannak állapítva a folyadék összes határai. A folyadék ugyanis (1d. ábra) a végtelenből két, az y -tengelyhez parallel, part között áramlik $(k-1)^{-\frac{1}{2}} : (k+1)^{\frac{1}{2}}$ sebességgel. A csatorna szélessége $= \pi (k+1)^{\frac{1}{2}} : (k-1)^{-\frac{1}{2}}$. A csatorna egyik partja az y -hoz parallel, mindkét felé végtelen, egyenes. A csatorna másik partját egy derékszög két szára alkotja: az egyik szár épen az egész pozitív y -tengely, a másik szár pedig a pozitív x -tengelynek 0-tól x_4 -ig érő darabja, a melyet *gátnak* nevezünk. A folyadék kiömlik itten nyugvó folyadékba egy nyíláson át, melynek szélessége

$$x_1 - x_4 = \pi + \frac{2}{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \arccos \frac{1}{k};$$

az egyik oldala felé szabad folyadéksugár szélessége a végtelenben $= \pi$.

E szerint a csatorna szélességét c -vel, a nyílását n -nel, és a sugárét s -sel jelölve, az eredményt így foglalhatjuk össze:

$$c : n : s = \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} : \left(1 + \frac{2 \arccos \frac{k-1}{k}}{\pi (k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right) : 1.$$

A k állandó e szerint meghatározza a csatorna és nyílás szélességének az arányát, valamint fordítva, az utóbbi meghatározza a k állandónak az értékét.

II. Az imént leírt z -tartományt a $z_1 z_2 z_3$ egyenesen tükrözve (2a. ábra), a folyadék kiömlését nyerjük egy csatornából egy körzépén lévő akármekkora nyíláson át.

A $k = 1$ speciálesenben $c : n = \infty$, mely eset nem más, mint a KIRCHHOFF-tól (f. i. helyen) részletesen leírt kiömlés egy végtelen nagy falon alkalmazott nyíláson át.

Tekintettel arra, hogy

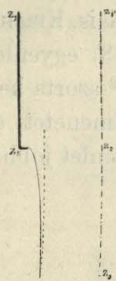
$$\arccos \frac{1}{k} = \arcsin \frac{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k},$$

e határesetben úgy találjuk, hogy az összehúzóadás

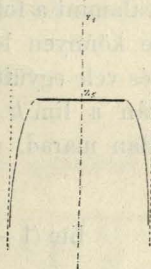
$$\frac{s}{n} = \frac{\pi}{2 + \pi},$$

megegyezőleg KIRCHHOFF eredményével.

III. Az I. alatt leírt z -tartományt az y -tengelyen tükröztetve (2b. ábra), egy folyamot nyerünk, mely két parallel egyenes part között haladva, egy a meder közepén alkalmazott akármilyen széles mozdulatlan — a partokra merőleges irányú — falon megtörve ketté válik.



2a. ábra.
($k=3$)



2b. ábra.
($k=2$)

Jelölvén a folyam, a fal és az e mögött nyugvó folyadéknak a végtelenben való szélességét c, f és s_1 -gyel, a következő arányt nyerjük:

$$c : s_1 : f = \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x_1 - \pi}{\pi} : \frac{x_4}{\pi},$$

azaz

$$c : s_1 : f = (k+1)^{\frac{1}{2}} : ((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}) : \left((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2 \arccos k^{-1}}{\pi (k+1)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (12)$$

Lássuk közelebb a $k = \infty$ határesetet. Ekkor

$$\lim \frac{(k-1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}}{(k+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{k}$$

és

$$\lim \frac{(k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}} - (2 \arccos k^{-1} : \pi (k+1)^{\frac{1}{2}})}{(k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2k}$$

lévén, nyerjük:

$$\lim (c : s_1 : f) = k^2 : k : \frac{1}{2}.$$

Ha tehát a folyam szélessége c véges és a fal f végtelen kicsiny, akkor a végtelen távolban a nyugvó folyadék szélessége s_1 végtelen kicsiny a folyaméhoz, de végtelen nagy a faléhoz képest.

Ezt a határesetet is tárgyalta KIRCHHOFF: a fal szélessége nála véges, a nyugvó folyadék szélessége a végtelen távolban végtelen nagy, valamint a folyam szélessége is. KIRCHHOFF leképezési egyenlete könnyen levezethető a (3) egyenletből; erre nézve a z -síkot és vele együtt a w -síkot is k^2 -szorta kell nagyobbitani, és azután a $\lim k = \infty$ határátmenetet eszközölni. A ζ így változatlan marad, míg a (3) egyenlet jobb oldalának határértéke

$$\lim (1 - e^{\frac{w}{k^2}}) k^2 = -w,$$

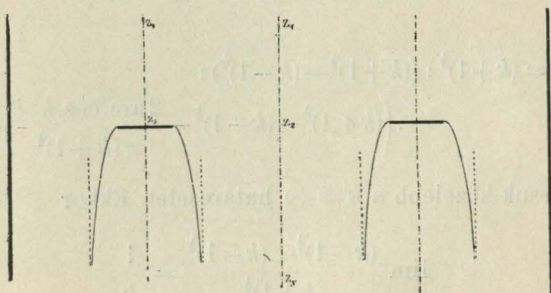
minélfogva a (3) egyenlet így hangzik:

$$\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} = i \sqrt{w},$$

melynek megoldása

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{w+1}} + \sqrt{\frac{1}{w+1} - 1},$$

lényegileg azonos KIRCHHOFF képletével.*



2c. ábra.

($k=2$)

IV. Az 1. ábrabeli z -tartomány ismételt tükrözése útján a 2c. ábrában vázolt áramalak nyerhető. Az egyenlő távolságok-

* U. o. pag. 304.

ban levő keresztfalak egyenlő nagyságúak, és számuk akármekkora lehet.

2. §. A gát keresztmetszete egyenesdarab.

(Folytatás).

V. Általánosítsuk a (3) egyenletet avval, hogy $k^2(1 - e^w)$ helyibe

$$\frac{k_0^2(\alpha^2 - e^w)}{\beta^2 - e^w}$$

törtfüggvényt teszünk. Akkor az (5) egyenletek helyét ezek foglalják el:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad u = k_0 \sqrt{\frac{\alpha^2 - e^w}{\beta^2 - e^w}}, \quad (13)$$

honnan

$$e^w = \beta^2 \frac{u^2 - k_1^2}{u^2 - k_0^2}, \quad (13a)$$

hol $k_1 = k_0 \alpha : \beta$. Ezekkel az egyenletekkel az 1. ábrabeli ζ - és w -tartományok a négyzetgyökök előjelének kellő megállapításával egyértékűleg és úgy vonatkoznak egymásra, hogy

$$w = -\infty, \quad \zeta = -i \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}}; \quad w = +\infty, \quad \zeta = -i \sqrt{\frac{k_0+1}{k_0-1}}$$

egymáshoz sorolt pontok.

A (13a)-ból következik, hogy

$$\frac{dw}{du} = \frac{2u}{u^2 - k_1^2} - \frac{2u}{u^2 - k_0^2} = \frac{2(k_1^2 - k_0^2)u}{(u^2 - k_1^2)(u^2 - k_0^2)},$$

és ebből a (2) egyenletnél fogva, mely így írható

$$\frac{dz}{du} = \zeta \frac{dw}{du},$$

az első (13) alatti egyenlet fölhasználásával ered:

$$\frac{dz}{du} = \frac{2u(1+u)}{(u^2 - k_1^2)\sqrt{1-u^2}} - \frac{2u(1+u)}{(u^2 - k_0^2)\sqrt{1-u^2}}. \quad (13b)$$

E szerint $\frac{dz}{du}$ két additív részből áll, melyek mindegyike azonos alakú a (6) egyenletbeli $\frac{dz}{du}$ -val. Ha itt is $u=1$ és $z=0$ összesorolt pontok, akkor

$$z = \int_1^u \frac{2u(1+u) du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{1-u^2}} - \int_1^u \frac{2u(1+u) du}{(u^2 - k_0^2) \sqrt{1-u^2}},$$

azaz

$$z = 2k_1^2 \int_1^u \frac{du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{1-u^2}} + \int_1^u \frac{2udu}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{1-u^2}} - 2k_0^2 \int_1^u \frac{du}{(u^2 - k_0^2) \sqrt{1-u^2}} - \int_1^u \frac{2udu}{(u^2 - k_0^2) \sqrt{1-u^2}}. \quad (13c)$$

a) Legyen $k_0 > k_1 > 1$; akkor a z -pont (3a. ábra) befutja a pozitív y -tengelyt $-\infty$ -tól 0-ig, a míg u a reális számok során k_1 -től 1-ig halad; ha u tovább fogy 1-től 0-ig, akkor $\frac{dz}{du}$ reális és negatív (ugyanis egyenlő előjelfű $\frac{dw}{du}$ -val), következésképp a z -pont bejárja a pozitív x -tengelyen fekvő $z_0 z_1$ darabot, hol

$$z_1 = \int_1^0 \zeta \frac{dw}{du} du.$$

Kiszámítom ez integrált. Először is

$$\int \frac{du}{(u^2 - k^2) \sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2k\sqrt{k^2-1}} \arcsin. \frac{2k\sqrt{k^2-1}u\sqrt{1-u^2}}{k^2-u^2},$$

$$\int \frac{udu}{(u^2 - k^2) \sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \arcsin. \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{k^2-1}};$$

ezek felhasználásával

$$z = \sum_{j=0,1} (-1)^{j+1} \left(\frac{k_j}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \arcsin. \frac{2k_j(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}} u(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{u^2 - k_j^2} + \frac{2}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \arcsin. \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

hol az $1 \geq u \geq 0$ intervallumban az arc.-ok folytonosan nőnek.

Ebből folyólag

$$z_1 = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} (\pi k_j + 2 \arctg. (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) = x_1.$$

β) Ha u innét kezdve képzetes, akkor a ζ komplex lesz és pedig abszolút értékére nézve állandóan $= 1$; ennek folytán a szabad határt ezek az egyenletek adják:

$$x = x_1 - \int_0^{v^2} \frac{du}{(u + k_0^2) \sqrt{1 + u}} + \int_0^{v^2} \frac{du}{(u + k_1^2) \sqrt{1 + u}},$$

$$y = \int_0^v \frac{2k_0^2 dv}{(v^2 + k_0^2) \sqrt{1 + v^2}} - \int_0^v \frac{2k_1^2 dv}{(v^2 + k_1^2) \sqrt{1 + v^2}},$$

azaz

$$x = x_1 + 2 \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\arctg. \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \arctg. \frac{1}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$y = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1 - k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + v(1 - k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}. \quad (14)$$

γ) Ha v nő 0-tól ∞ -ig, akkor x nő x_1 -től x_2 -ig, és y fogy 0-tól y_2 -ig, lévén

$$x_2 = x_1 + \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg. (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right),$$

vagy másképp írva

$$x_2 = x_1 + 2 \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1} \arctg. (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$y_2 = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{k_j - (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_j + (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

δ) Fogyjon már mostan az u reális úton ∞ -tól k_0 -ig. Akkor a ζ mindig képzetes marad és abszolút értéke 1-től növekedik $(k_0 + 1)^{\frac{1}{2}} : (k_0 - 1)^{\frac{1}{2}}$ értékig. Azért a z -pont, kiindulván az x_2 , y_2 pontból, leír egy negatív y -tengellyel párhuzamos egyenest.

Az u eddig leírt összes útjainak megfelel a φ növekedése $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig a $\psi = 0$ úton. Ez oknál fogva a z -pontnak

leírt egész útja áramvonal, mely a folyadék egyik szilárd határát jelöli meg.

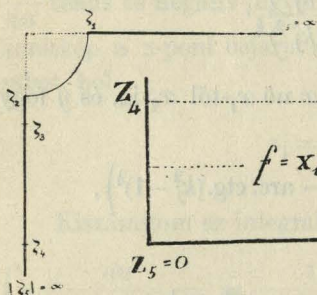
ε) Továbbá a $\varphi = \infty$, $0 \leq \psi \leq \pi$ egyenesnek megfelel a z -tartományban egy a pozitív x -tengelylyel parallel egyenes darabja, melynek hossza

$$x_{2'} - x_2 = \int_0^\pi \zeta_\infty i d\phi = \left(\frac{k_0 + 1}{k_0 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \pi = x_{3'} - x_3;$$

éppúgy a $\varphi = -\infty$, $0 \leq \psi \leq \pi$ útnak megfelel a pozitív x -tengelylyel parallel ezen vonal darab

$$x_{4'} - x_4 = \int_0^\pi \zeta_{-\infty} i d\phi = \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \pi. \quad (16)$$

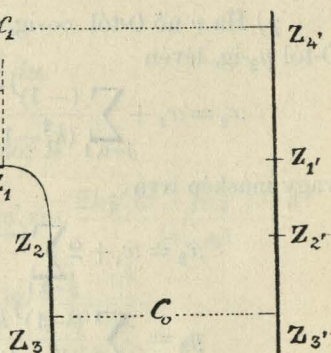
η) Végre a $k_0 < u < k_1$ értéksornak szintén képzetes ζ -értékek felelnek meg; azért a z -pont szerinte leír egy az y -tengelyhez parallel, mind a kétfelé végtelen, egyenest. Miután az u ezen



3a. ábra.

$$(k_1 = 1.2, k_0 = 3, f = 1.62, c_0 = 1.414.$$

$$c_1 = 3.303, x_2 = 1.904, y_2 = 0.473).$$



3b. ábra.

útjának a w -síkon a $\psi = \pi$, $-\infty < \varphi < +\infty$, egyenes felel meg, azért az imént szerkesztett egyenes is áramvonal és pedig a folyadéknak megint szilárd határa.

Evvel a folyadék határai teljesen meg vannak állapítva. Miként a 3b. ábrából látható, a folyadék a végtelenből elindulva

$[(k_1 - 1)^{\frac{1}{2}} : (k_1 + 1)^{\frac{1}{2}}$ sebességgel] két parallel egyenestől (40 és 4'1'-től) határolt csatornán át ömlik, melynek 011' keresztmet-szetén 01 falat és 11' nyílást találván ez utóbbin át egy darabig egyik oldalán nyugvó folyadékkal határos téren áramlik át, a mennyiben az 12 görbe vonalon a sebessége = 1 lévén, ez a görbe szabad határ; más oldalon a csatorna 4'1' falon tovább folytatódik végtelenig, és a vele parallel 23 fallal egy szűkebb csatornát alkot, melybe a folyadék beömölve a végtelenségbe $[(k_0 - 1)^{\frac{1}{2}} : (k_0 + 1)^{\frac{1}{2}}$ sebességgel] jut. A két csatorna és a nyílás szélességét c_1, c_0, f betűkkel jelölván, a következő arány áll fenn:

$$c_1 : c_0 : f = \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{k_0 + 1}{k_0 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x}{\pi},$$

mely x_1 főntebb határozottatott meg.

Ha már mostan a $c_1 : c_0 : f$ arányok advák, akkor ez által a k_1 és k_0 is meg van határozva és ezekkel minden egyéb, többek között a szabad határnak a falra való projekciója $|y_2|$ is. A leírt áramlás csak úgy jő tehát létre, ha a $c_1 : c_0 : f : |y_2|$ arányok a kiszámított értékek szerint advák.

VI. Tükrözéssel ez az áramlás is többféleképp sokszorozható. A 4'3' (azaz z_4, z_3) falon való tükrözés például a szabad kiömlést szolgáltatja egy, a kiömlés helyén megszükitett, csatornán át egy szűkebb csatornába —, a két csatorna tengelye közös lévén a szabad sugár hossza a csatorna és a nyílás szélessége által a fentebb részletezett módon van meghatározva.

VII. Az V. alatti leképezési egyenlet értelmezésére térek át azon esetre, ha k_0 és β képzetes; ha k_0 és β -val most mindjárt az abszolút értékeket jelöljük és a második (13) egyenletet nem írjuk fel újból, akkor a (13) és (13a) stb. egyenletek helyébe ezek jönnek:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad ew = \beta^2 \frac{u^3 - k_1^2}{u^2 + k_0^2},$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{2(k_1^2 + k_0^2)u}{(u^2 + k_0^2)(u^2 - k_1^2)}, \quad (17)$$

$$z = \int_1^u \zeta \frac{dw}{du} du = \int_1^u \left(\frac{1}{u^2 - k_1^2} - \frac{1}{u^2 + k_0^2} \right) \frac{2u(1+u) du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ezek szerint a $w = -\infty$ pontnak megfelelő ζ -pont ez:

$$\zeta = -i \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}},$$

hogy tehát a kiinduló sebesség a végtelenben most is parallel legyen az x -tengelyhez, most is $k_1 > 1$ teendő. A $w = +\infty$ pontnak megfelelőleg viszont

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-k_0i}{1+k_0i}};$$

itt tehát tekintettel a k_0 reális voltára, $|\zeta| = 1$, minélfogva az áram az y -tengelyhez ferdén álló szabad sugárban végződik.

A w -tartomány határai itten $\phi = \pi$ és $\varphi = 2\pi$ parallel-egyenesek legyenek.

Rajzoljuk meg itt is az áram határait (4a, b. ábrák).

A w , u , ζ és z tartományokban összesorolt vonaldarabok ezek. A $\phi = \pi$, $-\infty \leq \varphi \leq +\infty$ egyeneshez tartoznak

a) szakaszban, hol $\frac{\zeta}{i}$ és $\frac{z}{i}$ reális,

$$k_1 \geq u \geq 1, \quad \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}} \leq \frac{\zeta}{i} \leq \infty, \quad \infty \geq \frac{z}{i} \leq 0;$$

β) szakaszban, hol ζ és z reális,

$$1 \geq u \geq 0, \quad \infty \geq \zeta \geq 1, \quad 0 \geq z \geq z_1;$$

γ) szakaszban, hol $\frac{u}{i}$ reális és ζ és z komplexek,

$$0 \leq -\frac{u}{i} \leq k_0, \quad |\zeta| = 1,$$

minélfogva a megfelelő z szabad határt ad.

A $\phi = 2\pi$, $-\infty \leq \varphi \leq +\infty$ egyeneshez hasonlóképen tartoznak a

δ) szakaszban

$$k_1 \leq u \leq \infty, \quad \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}} \leq \frac{\zeta}{i} \leq 1, \quad z = x + yi,$$

Az áramterület határai ezek után vázolhatók (4b. ábra); a folyadék a végtelenségből 40, 4'3 parallel falak között áramlik, 01 keresztfalat kikerülve, az 13 nyílás felé; hol nyugvó folyadékba kiömölve 122'3 sugárban halad a végtelenbe. Számítsuk még ki a sugár vastagságát és a nyílás végpontjainak koordinátait z_1 és z_3 -at.

Jelölve a sugár keresztmetszetét a végtelenben 22'-sal, léssen

$$z_2 - z = \int_{\pi}^{2\pi} \zeta_{\infty} i d\psi = \sqrt{\frac{1 - k_0 i}{1 + k_0 i}} i \pi, \quad (18)$$

mely komplex szám abszolút értéke $= \pi$; tehát a sugár keresztmetszete a végtelenben $= \pi$.

A mi illeti a z_1 -et, $z_1 = x_1 + y_1 i$, hol

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \int_1^0 \zeta \frac{dw}{du} du,$$

azaz

$$x_1 = z_1 = \frac{1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} (2 \operatorname{arc.} \cotg. (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \pi k_1) - \frac{1}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\pi k_0 + 1. \frac{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1} \right). \quad (19)$$

A z_3 -at a folyadéksugár alakjával egyetemben fogjuk meghatározni. A $\phi = \pi$ áramvonalon fekvő szabad határt ez az egyenlet jellemzi:

$$z = \int_1^0 \zeta \frac{dw}{du} du + \int_0^u \zeta \frac{dw}{du} du;$$

itt az első integrál azonos az imént kiszámított $x_1 = z_1$ reális értékkel; a második integrálban pedig az u útja a γ) szakaszban folyván le, képzetes, t. i.

$$0 \leq -\frac{u}{i} \leq k_0;$$

ez integrált reális és képzetes részére fölbontandók, tegyük az

$$u = -iv$$

substitucziót, miáltal

$$\int_0^u \zeta \frac{dv}{du} du = \int_0^v \left(\frac{1}{v^2 - k_0^2} - \frac{1}{v^2 + k_1^2} \right) \frac{2(-v + iv^2) dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

integrál fölbomlik

$$x - x_1 = \int_0^v \left(-\frac{1}{v^2 - k_0^2} + \frac{1}{v^2 + k_1^2} \right) \frac{2v dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

reális részre, és

$$iy = i \int_0^v \left(\frac{1}{v^2 - k_0^2} - \frac{1}{v^2 + k_1^2} \right) \frac{2v^2 dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

képzetes részre. Az imént fölirt két egyenlettel jellemzett x , y pont írja le a $\phi = \pi$ áramvonalon fekvő 12 szabad határt.

Az y ordinátát kifejező integrálokat részletesen kiszámítjuk különösen $\lim v = k_0$ speciálértéknél, mely a végtelenben levő 2 pontot jellemzi. Először is így írható az y :

$$y = \int_0^v \left(\frac{k_1^2}{v^2 + k_1^2} + \frac{k_0^2}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2dv}{\sqrt{1 + v^2}}, \quad (20)$$

hol

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{2k_1^2}{v^2 + k_0^2} \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} &= \frac{k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_1(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + v(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_1(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \int_0^v \frac{2k_0^2}{v^2 - k_0^2} \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} &= \frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_0(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{k_0(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + v(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (20a)$$

Továbbá a (17) alatti egyenletek másodika $w = \varphi + \pi i$ és $u = iv$ helyettesítéssel erre az alakra jő:

$$+ e^\varphi = \beta^2 \frac{v^2 + k_1^2}{-v^2 + k_0^2},$$

honnan

$$v^2 = k_0^2 - \frac{k_1^2 - k_0^2}{\beta^{-2} e^\varphi + 1},$$

és $\lim v = k_0$, $\lim \varphi = \infty$ környezetében felsőbb rangú kicsinyek elhagyásával és $k_1^2 - k_0^2 = k^2$ jelöléssel

$$v = k_0 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \beta^2}{k_0} e^{-\varphi},$$

$$(1+v^2)^{\frac{1}{2}} = (1+k_0^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{k^2 \beta^2}{(1+k_0^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\varphi},$$

és így

$$k_0(1+v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1+k_0^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{k^2 \beta^2 e^{-\varphi}}{k_0(1+k_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ezt fölhasználva, a (20) és (20a) alapján leszén

$$\begin{aligned} \lim. y = & \frac{k_1}{(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_1(1+k_0^2)^{\frac{1}{2}} + k_0(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k_1(1+k_0^2)^{\frac{1}{2}} - k_0(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(k_1^2-k_0^2)\beta^2 e^{-\varphi}}{4k_0^2(1+k_0^2)}, \end{aligned}$$

azaz

$$\lim. y = - \frac{k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \varphi + \lambda,$$

hol

$$\lambda = \frac{k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\beta^2(k_1^2-k_0^2)}{4k_0^2(k_0^2+1)} + \frac{k_1}{(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_1(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}} + k_0(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k_1(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}} - k_0(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ez tehát a végtelenbe távozó 2 pont y koordinátája. Kiszámítjuk belőle a végtelenben fekvő 2-vel a sugár ugyanazon egy normálmetszetén levő 2' pont y koordinátáját a (18) egyenletbeli $z_2' - z_2$ képzetes részének hozzáadása révén, úgy hogy

$$y_{2'} = - \frac{k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \varphi + \lambda + \frac{\pi}{\sqrt{1+k_0^2}}. \quad (21)$$

Kiszámítjuk ugyanezen $y_{2'}$ -t a folyadék-sugár átellenes határának meghatározása révén. E határvonal analitikai előállítását a VII, ε) alapján ezek az egyenletek eszközlik:

$$\begin{aligned} x = x_3 + \int_{\infty}^v \left(\frac{1}{v^2 + k_1^2} - \frac{1}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2v dv}{\sqrt{1+v^2}}, \\ y = y_3 + \int_{\infty}^v \left(\frac{k_1^2}{v^2 + k_1^2} + \frac{k_0^2}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2dv}{\sqrt{1+v^2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

hol $\infty \geq v \geq k_0$ és (VII, δ)

$$x_3 = x_4 = \pi \sqrt{\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}}.$$

A $\lim. v = k_0$, $\lim. \varphi = \infty$ környezetében most

$$v = k_0 + \frac{1}{2} \frac{k_1^2 \beta^2}{k_0} e^{-\varphi},$$

$$(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{k_1^2 \beta^2}{(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\varphi},$$

és

$$k_0(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{k_1^2 \beta^2 e^{-\varphi}}{k_0(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ezekre és a (20a) alatti integrál-képletekre való tekintettel kijő a (22)-ből most

$$y_2 = -\frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \varphi + \mu + y_3, \quad (22a)$$

hol

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{\beta^2 (k_1^2 - k_0^2)}{4k_0^2 (k_0^2 + 1)} + \frac{k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{k_1 (k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + k_0 (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_1 (k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - k_0 (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + k_0} - \frac{k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{k_1 + (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_1 - (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

A (21) és a (22a) alatti y_2 ordináták azonosságából ered végül az y_3 számára a következő érték:

$$\begin{aligned} y_3 = & \frac{\pi}{(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + k_0} \\ & + \frac{k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} \frac{k_1 + (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_1 - (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

és redukezió után

$$\begin{aligned} y_3 = & \frac{\pi}{(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} ((k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - k_0) \\ & + \frac{2k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} (k_1 + (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (23)$$

Az y_3 tagjai közül a harmadik $+\infty$ határhoz közeledik, ha $\lim. k_1 = \infty$; a második pedig $-\infty$ határhoz, ha $\lim. k_0 = \infty$,

míg az első határértéke ekkor $= 0$. Azért a k_0 és k_1 úgy határozhatók meg, hogy az y_3 akármekkora pozitív vagy negatív értéket fölvegyen.

Az y_3 számára ugyanezen értéket találjuk akkor is, ha u szerint reális úton 1-től ∞ -ig integrálunk az $u = k_1$ pont kikerülésével; ezen számításaimat a következőkben vázlatosan közlöm: A kerület a) és δ) szakaszának tekintetbe vételével kijő

$$y_3 i = \int_1^{u_1} \zeta \frac{dw}{du} du + \int_{u_2}^{\infty} \zeta \frac{dw}{du} du,$$

hol u_1 és u_2 úgy határozandók meg, hogy az első $w = \varphi + \pi i$, a második pedig $w = \varphi + 2\pi i$ értéknek felelven meg, a φ határtalanul fogyjon negatív végtelenig; továbbá

$$\zeta \frac{dw}{du} = \left(\frac{1}{u^2 - k_1^2} - \frac{1}{u^2 + k_0^2} \right) \frac{2u + 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Az y_3 két additív részre osztva írható

$$y_3 = A + B,$$

hol

$$A = - \int \frac{2udu}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} + \int \frac{2udu}{(u^2 + k_0^2) \sqrt{u^2 - 1}},$$

$$B = - \int \frac{2k_1^2 du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} - \int \frac{2k_0^2 du}{(u^2 + k_0^2) \sqrt{u^2 - 1}};$$

az integrálok határai itt is úgy veendőek, mint az iménti $\int \zeta \frac{dw}{du} du$ határai.

Az A integrálokban helyettesítve $u^2 = v$, leszén

$$A = \frac{\pi}{(1 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ugyanis az A integrálok másodika 1 és ∞ határok között véve, az imént fölirt értéket adja; ellenben

$$- \int \frac{2udu}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - 1} + \sqrt{k_1^2 - 1}}{\sqrt{u^2 - 1} - \sqrt{k_1^2 - 1}} C,$$

hol C integrál állandó, minélfogva ez integrál a szóban levő határok között véve

$$= \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 1}} \lim. l. \frac{\sqrt{u_2^2 - 1} - \sqrt{k_1^2 - 1}}{\sqrt{k_1^2 - 1} - \sqrt{u_1^2 - 1}} = 0.$$

Valójában

$$\begin{aligned} -e^p(u_1^2 + k_0^2) &= \beta^2(u_1^2 - k_1^2), \\ e^p(u_2^2 + k_0^2) &= \beta^2(u_2^2 - k_1^2), \end{aligned}$$

mely egyenletekből e^p magasabb hatványainak elhagyásával

$$\begin{aligned} \sqrt{k_1^2 - 1} - \sqrt{u_1^2 - 1} &= \frac{1}{2} \frac{k_0^2 + k_1^2}{\sqrt{k_1^2 - 1}} \frac{e^p}{\beta^2}, \\ \sqrt{u_2^2 - 1} - \sqrt{k_1^2 - 1} &= \frac{1}{2} \frac{k_0^2 + k_1^2}{\sqrt{k_1^2 - 1}} \frac{e^p}{\beta^2}. \end{aligned}$$

A mi a B integrálokat illeti,

$$\begin{aligned} &\int \frac{2k_0^2 du}{(u^2 + k_0^2) \sqrt{u^2 - 1}} = \\ &= -\frac{k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} l. C \left(\frac{k_0(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + (u^2 - 1)^{\frac{1}{2}} u}{u^2 + k_0^2} - \frac{2k_0^2 + 1}{2k_0(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\int \frac{2k_1^2 du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} = \\ &= -\frac{k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} l. C \left(\frac{k_1(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + u(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{u^2 - k_0^2} - \frac{1 - 2k_1^2}{k_1(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Ezekből folyólag

$$\int_1^{\infty} \frac{2k_0^2 du}{(u^2 + k_0^2) \sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{2k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} l. (-k_0 + (k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}})$$

és az u_1 és u_2 fentebbi definíciója mellett

$$\begin{aligned} &\int_1^{u_1} \frac{2k_1^2 du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} + \int_{u_2}^{\infty} \frac{2k_1^2 du}{(u^2 - k_1^2) \sqrt{u^2 - 1}} = \\ &= -\frac{2k_1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} l. (k_1 + (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

minélfogva

$$B = \frac{2k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} (-k_0 + (k_0^2-1)^{\frac{1}{2}}) + \frac{2k_1}{(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}} \text{l.} (k_1 + (k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}).$$

q. e. d.

Megjegyzés. A csatorna és nyílás szélessége s az utóbbi magassága sorban

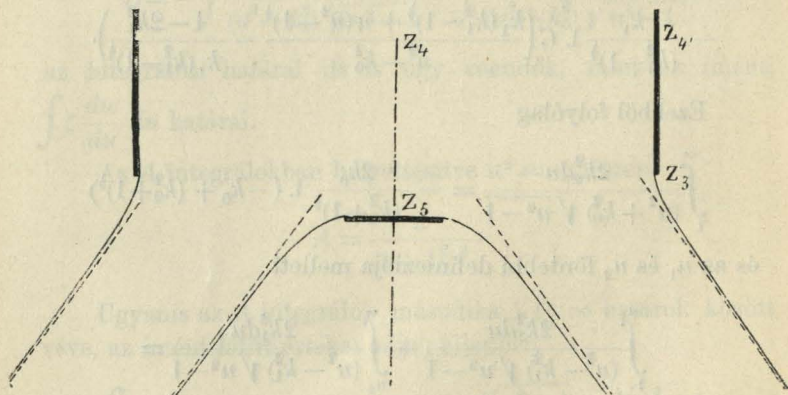
$$c = a\pi \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}},$$

$$f = c - ax_1$$

$$m = ay_3;$$

ezek a mennyiségek tehát tartalmazznak három egymástól független állandót, sokaságuk háromszoros végtelen nagy. Ha tehát c , f és m advák, akkor három egyenlet áll rendelkezésünkre az a , k_0 , k_1 ismeretlenek meghatározására; hogy azonban van-e mindig reális megoldás, azt, az egyenletek bonyolult transcendensek lévén, nehéz eldönteni.

VIII. A $(z_4 z_5)$ tengelyen való tükrözéssel egy csatornából kiszökő folyadéksugár szimmetriás ketté oszlását nyerjük egy szilárd falon, mely a csatorna tengelyének irányára merőleges; (5. ábra). Ez a fal természetesen, ha k_0 és k_1 kellő módon határozatik meg, a csatorna belsejében is lehet.



5. ábra.

IX. Anélkül, hogy részletes számításokba bocsátkoznám, csatlakozással az imént tárgyalthoz, egy hasonló leképezést írok föl. Ha ugyanis a

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad e^w = \beta^2 \frac{u^2 + k_1^2}{u^2 + k_0^2} \quad (24)$$

egyenletekben β , k_0 , k_1 reálisok, akkor

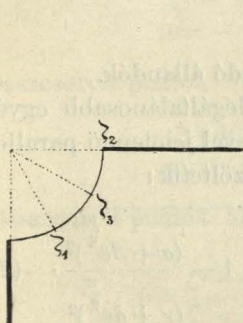
$$w = -\infty, \quad u = -k_1 i, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1 - k_1 i}{1 + k_1 i}},$$

$$w = +\infty, \quad u = -k_0 i, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1 - k_0 i}{1 + k_0 i}},$$

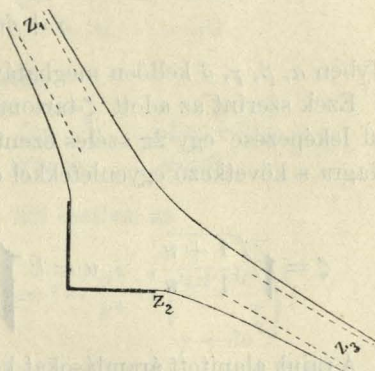
$$w = 1 \cdot \frac{\beta^2 k_1^2}{k_0^2}, \quad u = 0, \quad \zeta = 1$$

összetartozó értékek, és látni való, hogy mind a három ζ -pont az egységkörön fekszik.

Ebből már elkészíthető az áramlás vázlata; (6a. 6b. ábrák).



6a. ábra.



6b. ábra.

3. §. A gát keresztmetszete ┘ alakú.

X. A ζ -tartomány határai legyenek (7b. ábra): egy félkör, melynek végpontjai 3, 2 a ξ tengelyen fekszenek; a 3-ból és 2-ből végtelenbe menő sugarak; a végtelenben fekvő BB negyedkörök; végül a kétszer számítandó BA illetve AB

sugárdarab az η tengelyen, melynek B , B végpontjai a végtelenben, A végpontja pedig a középponttól > 1 távolságban fekszik.

E ζ -tartomány leképezendő egy 2π szélességű parallelszalagra úgy, hogy a kerületek három *tetszőszerű* pontjai egymásra vonatkozzanak. A (3) alatti egyenlet már ilyen leképezést állapít meg, csak hogy speciális pontpárok összerendelése mellett (4. alatti egyenletek szerint); ugyanis az itt vázolt ζ -tartomány jobbfelén eső határnak a képe a w -tartomány $\psi = 0$ egyenesre, a balfelén esőé pedig (a folytonosság szem előtt tartásával) $\psi = 2\pi$. Hogy tehát a kitűzött feladatot általánosan megoldjuk, ezt a w -tartományt egy új W -tartományra kell egyértékűleg leképezni, mely szintén 2π szélességű parallelszalag, oly módon, hogy az első tartomány $w = -\infty$, $w = 0$, $w = +\infty$ pontjainak a második tartomány bármelyik három adott pontja feleljen meg, a mire módot nyújt a következő vonatkozás:

$$e^{\frac{w}{2}} = \frac{a + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}},$$

melyben a , β , γ , δ kellően meghatározandó állandók.

Ezek szerint az adott ζ -tartomány legáltalánosabb egyértékű leképezése egy 2π széles ezentúl w -vel jelölendő parallelszalagra a következő egyenletekkel eszközöltetik:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad u = k \sqrt{1 - \frac{(a + \beta e^{\frac{w}{2}})^2}{(\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}})^2}}. \quad (25)$$

A rájuk alapított áramlásokat könnyen vázolhatjuk, ha a w tartomány $-\infty$, 0 , $+\infty$ pontjainak képeit a fentebb vázolt ζ idom határan, csak ugyanazon forgás irányban, de különben tetszés szerint választjuk meg.

A részletes számítás céljából v -síkot vezetünk be

$$v = \frac{a + \beta e^{\frac{u}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{u}{2}}} \quad (25a)$$

leképező egyenlettel, úgy hogy

$$e^{\frac{w}{2}} = \frac{-a + \gamma v}{\beta - \delta v},$$

honnan

$$\frac{dw}{dv} = 2 \frac{a\delta - \beta\gamma}{(a - \gamma v)(\beta - \delta v)}. \quad (25b)$$

Ebből és $\zeta = \frac{dz}{dw}$ egyenletből következik, hogy

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{2(a\delta - \beta\gamma)}{(\beta - \delta v)},$$

azaz

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(a\delta - \beta\gamma)}{(a - \gamma v)(\beta - \delta v)} \frac{1 + k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}, \quad (25c)$$

tehát z a v -nek általánosan szólva elliptikus integrálja.

Tovább azon esetet vizsgáljuk, a midőn vagy reális pozitív α_0 mellett

$$\begin{aligned} \zeta &= -\alpha_0, & \zeta &= -1, & \zeta &= +1 \\ w &= -\infty, & w &= +\infty, & w &= 0 \end{aligned} \quad \text{I.}$$

összesorolt pontok; vagy pedig

$$\begin{aligned} \zeta &= +\alpha_0, & \zeta &= -1, & \zeta &= +1 \\ w &= -\infty, & w &= \infty, & w &= 0 \end{aligned} \quad \text{II.}$$

összesorolt pontok. Mind a két esetben az

$$u = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad v^2 = 1 - \frac{u^2}{k^2} = \left(\frac{a + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}} \right)^2$$

egyenletekből folyólag kijőnek a következő föltételi egyenletek:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0^2 + 1} \right)^2 &= \left(\frac{a}{\gamma} \right)^2 \\ 1 &= \left(\frac{\beta}{\delta} \right)^2 \\ 1 &= \left(\frac{a + \beta}{\gamma + \delta} \right)^2. \end{aligned}$$

Az egyenletek kielégíthetők vagy így :

$$\begin{array}{ll} a = -2a, & \beta = 1+a, \quad \delta = 1+a, \quad \gamma = -2; & a) \\ \text{vagy így} & a = 2a, \quad \beta = 1-a, \quad \delta = -1+a, \quad \gamma = 2. & b) \end{array}$$

Az első esetben $\frac{\beta}{\delta} = +1$, a másodikban $= -1$.

Az $\frac{a}{\gamma}$ mind a két esetben $= a$.

Az $\frac{a+\beta}{\gamma+\delta}$ első esetben $= -1$; a másodikban $= +1$.

Azok a kombinációk, hogy együttesen vagy

$$\frac{\beta}{\delta} = +1 \quad \text{és} \quad \frac{a+\beta}{\gamma+\delta} = +1,$$

vagy pedig

$$\frac{\beta}{\delta} = -1 \quad \text{és} \quad \frac{a+\beta}{\gamma+\delta} = -1,$$

nem jönnek tekintetbe, miután ekkor $a = \gamma$ volna, azaz

$$k = \frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1} < 1$$

holott előzetes megállapítás szerint $k > 1$ kell, hogy legyen.

Az a) alatti a, β, γ, δ mellett

$$a\delta - \beta\gamma = -2a(1+a) + 2(1+a) = 2(1-a^2),$$

a b) alattiak mellett

$$a\delta - \beta\gamma = 2a(a-1) - 2(1-a) = 2(a^2-1),$$

és ugyanazon sorrendben

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}; \quad a)$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1+a)}{(a-v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}. \quad b)$$

Ez a két egyenlet egymásba megy át, ha v és a helyett tétetnek $-v, -a$.

Az elsőhöz tartozó substituczió:

$$v = \frac{-2a + (1+a)e^{\frac{v}{2}}}{-2 + (1+a)e^{\frac{v}{2}}}. \quad a)$$

A másodikhoz tartozó substituczió:

$$v = \frac{2a + (1-a)e^{\frac{v}{2}}}{2 + (-1+a)e^{\frac{v}{2}}}. \quad b)$$

Az elsőhöz soroljuk az I., a másodikhoz a II. esetet.

Megjegyzés. Legyen

$$\lambda^2 = \frac{k^2 - 1}{k^2},$$

$$a^2 = \lambda^2 + \frac{\delta^2}{k^2},$$

mely δ -át az elébb így jelölt mennyiséggel ne zavarjuk össze; akkor ez így írva

$$\lambda^2 + \frac{\delta^2}{k^2} = 1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{-1 + a_0^2}{+1 + a_0^2} \right)^2$$

azaz

$$\frac{k^2 - 1 + \delta^2}{k^2} = 1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{-1 + a_0^2}{+1 + a_0^2} \right)^2,$$

azaz

$$-1 + \delta^2 = - \left(\frac{-1 + a_0^2}{+1 + a_0^2} \right)^2,$$

lészen

$$\delta^2 = 1 - \left(\frac{1 - a_0^2}{1 + a_0^2} \right)^2.$$

Ámde a_0 reális, tehát

$$0 < \delta < 1.$$

Egyébiránt a δ értéke így írható

$$\delta = \frac{2a_0}{1 + a_0^2};$$

iktassuk még ide, hogy miként könnyen igazolható

$$k \sqrt{1-a^2} = \frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1}.$$

Az $a^2 = \lambda^2 + \frac{\partial^2}{k^2}$ egyenletből az következik tehát, hogy

$$\lambda < |a| < 1.$$

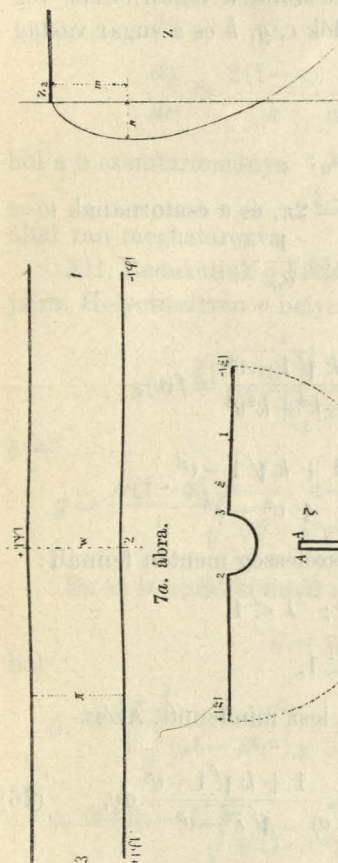
A következő táblázatban össze vannak állítva bizonyos egymáshoz tartozó fontosabb ζ , u , v , w értékek.

I. eset. (7. ábrák pag. 31.)

II. eset. (9. ábrák pag. 41.)

| ζ | u | v | w | z határ iránya | ζ | u | v | w | z határ iránya |
|-------------------------|---------|------------|-----------|---------------------|-------------------------|---------|------------|-----------|---------------------|
| $-a_0$ | u_0 | a | $-\infty$ | \uparrow | $+a_0$ | u_0 | a | $-\infty$ | \rightarrow |
| $-\infty$ $-i\infty$ | 1 | λ | | \rightarrow | $+\infty$ $-i\infty$ | +1 | $+\lambda$ | | \downarrow |
| $-i\bar{a}$ | z | 0 | | | $-i\bar{a}$ | z | 0 | | \downarrow |
| $-i\infty$ $+\infty$ | 1 | $-\lambda$ | | \downarrow | $-i\infty$ $-\infty$ | 1 | $-\lambda$ | | \leftarrow |
| 1 | 0 | -1 | 0 | | -1 | 0 | -1 | $+\infty$ | |
| $ \zeta =1$ | $ u i$ | $v^2 > 1$ | | szabad határ | $ \zeta =1$ | $ u i$ | $v^2 > 1$ | | szabad határ |
| -1 | 0 | 1 | ∞ | | +1 | 0 | +1 | | |
| $-a_0$ | u_0 | a | $-\infty$ | \uparrow | $+a_0$ | u_0 | a | $-\infty$ | \rightarrow |

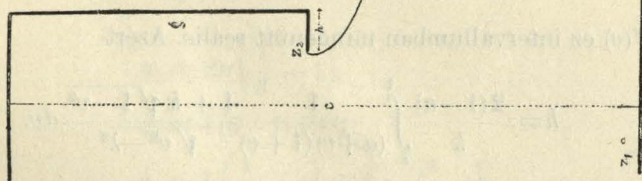
XI. Foglalkozzunk előbb az I. esettel, mint bizonyos tekintetben általánosabbal. A folyadék a végtelenből c szélességű csatornából áramlik az egyik csatornafal folytatását képező g szélességű gát felé, melynek h hosszúságú beszökése van (7c.



7a. ábra.

7d. ábra.

7b. ábra.



7c. ábra.

ábra); ez a beszökés végén a folyadéknak *szabad határa* kezdődik; e szabad határ aszimptotice simúl a csatornának végtelenbe nyúló falához. Kiszámítandók c , g , h és a sugár vastagsága s .

Mindenek előtt

$$s = 2\pi,$$

$$c = 2\pi : a_0;$$

ugyanis a w szalag szélessége $= s = 2\pi$, és a csatornának $w = -\infty$ vidékén az áramlás sebessége $= \frac{1}{a_0}$.

Jelöltessék továbbá

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}} = f(v),$$

azaz

$$f(v) = \frac{2(1-a):k}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}}.$$

Tekintettel arra, hogy a g gátszélesség mentén fennáll:

$$-\lambda < v < +\lambda; \quad \lambda < 1,$$

minélfogva

$$v^2 < \lambda^2 < 1,$$

az $f(v)$ ez intervallumban képzetes lesz mindenütt. Azért

$$g = \frac{2(1-a)}{k} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{(a-v)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}} dv, \quad (26)$$

hol a négyzetgyökök pozitív előjellel veendők.

Épúgy tekintettel arra, hogy a h beszökés mentén fennáll:

$$\lambda < -v < 1,$$

az $f(v)$ ez intervallumban mindenütt reális. Azért

$$h = \frac{2(1-a)}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{(a+v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}} dv. \quad (27)$$

Végül a szabad határ differenciális-egyenletei:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{1}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{\sqrt{v^2-1}}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

hol a v számtartománya

$$1 \leq v^2 \leq \infty$$

által van meghatározva.

XII. Redukáljuk g kiszámítását LEGENDRE normálintegráljaira. Helyettesítvén v helyett λv integrál-változót

$$g = \frac{2(1-a)}{k} \int_{-1}^{+1} \frac{1 + k\sqrt{1-\lambda^2 v^2}}{(a-\lambda v)(1-\lambda v)\sqrt{1-v^2}} dv$$

azaz

$$g = \frac{4(1-a)}{k} \int_0^1 \frac{a + \lambda^2 v^2}{(a^2 - \lambda^2 v^2)(1 - \lambda^2 v^2)} \frac{1 + k\sqrt{1-\lambda^2 v^2}}{\sqrt{1-v^2}} dv.$$

Ez az integrál könnyű reductiók után föloszlik így:

$$g = g_1 + g_2 + g_3,$$

hol

$$g_1 = \frac{4a}{k} \int_0^1 \frac{dv}{(a^2 - \lambda^2 v^2)\sqrt{1-v^2}} - \frac{4}{k} \int_0^1 \frac{dv}{(1 - \lambda^2 v^2)\sqrt{1-v^2}},$$

$$g_2 = 4(a-1) \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

$$g_3 = 4\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \int_0^1 \frac{dv}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2} v^2\right)\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

azaz

$$g_1 = 2\pi\left(\frac{1}{\delta} - 1\right),$$

$$g_2 = 4(a-1)F^1(\lambda),$$

$$g_3 = 4\left(\frac{1}{a} - a\right)\Pi^1\left(-\frac{\lambda^2}{a^2}, \lambda\right), \quad (26a)$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3.$$

Redukáljuk továbbá a h kiszámítását is LEGENDRE normálintegráljaira. Írjuk így:

$$h = \frac{2(1-a)}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{dv}{(a+v)(1+v) \sqrt{v^2 - \lambda^2}} \\ + 2(1-a) \int_{\lambda}^1 \frac{\sqrt{1-v^2} dv}{(a+v)(1+v) \sqrt{v^2 - \lambda^2}}$$

azaz

$$h = h_1 + h_2, \quad (27a)$$

hol h_1 az első tagot, h_2 a másodikat jelentse. Az első tag körméreti, a második elliptikus integrál, és a mi az elsőt illeti

$$h_1 = \frac{2}{\delta} \text{l.} \frac{k^2(a+\lambda^2) + \delta}{\lambda(a+1)k^2} + 2 \text{l.} \lambda. \quad (27b)$$

A mi a második tagot illeti,

$$v = \lambda \frac{1 + \mu x^2}{1 - \mu x^2}; \quad \mu = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$$

szubstitució alkalmazásával

$$\int_{\lambda}^1 \frac{dv}{\sqrt{(v^2 - \lambda^2)(1 - v^2)}} = \frac{2}{1 - \lambda} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \mu^2 x^2)}},$$

és ugyanennek az alkalmazásával kijő

$$h_2 = \frac{4(1-a)}{a-\lambda} \left(F^1(\mu) - \frac{2\lambda(1+a)}{(1+\lambda)(a+\lambda)} \Pi^1(\nu, \mu) \right), \quad (27c)$$

hol

$$\nu^2 = \frac{a-\lambda}{(1+\lambda)(a+\lambda)}; \quad \mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}. \quad (27d)$$

Végezetül a szabad határ egyenleteit is előállíthatjuk egy reális, 0 és 1 között változó, parameter körméreti és LEGENDRE első és harmadnemű elliptikus integráljaival. Ugyanis behozva v helyett $\frac{1}{v_1}$ változót, a (28) alatti egyenletek ezekbe mennek át:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dv_1} &= \frac{2(a-1)}{k} \frac{v_1}{(1-av_1)(v_1-1)\sqrt{1-\lambda^2 v_1^2}}, \\ \frac{dy}{dv_1} &= 2(a-1) \frac{\sqrt{1-v_1^2}}{(1-av_1)(v_1-1)\sqrt{1-\lambda^2 v_1^2}},\end{aligned}\quad (28a)$$

hol a v_1 számtartománya

$$1 \geq v_1^2 \geq 0$$

által van meghatározva.

A $\frac{dx}{dv_1}$ már körméreti differenciál-hányados. A mi illeti a $\frac{dy}{dv_1}$ kifejezését, az három tagra bontható ez identitás alkalmazásával:

$$\frac{1}{(1-av_1)(v_1-1)} \sqrt{\frac{1-v_1^2}{1-\lambda^2 v_1^2}} = \left[\frac{v_1(a+1)}{a^2 v_1^2 - 1} + \frac{1}{a} \frac{a+1}{a} \frac{1}{a^2 v_1^2 - 1} \right] \frac{1}{\sqrt{R}},$$

hol

$$R = (1-v_1^2)(1-\lambda^2 v_1^2).$$

Ennek folytán

$$\begin{aligned}y &= \frac{2(a-1)}{a} F(v_1, \lambda) + \frac{2(1-a^2)}{a} \Pi(v_1, -a, \lambda) \\ &+ (a^2-1) \int_0^{v_1^2} \frac{dv}{(a^2 v - 1) \sqrt{(1-v)(1-\lambda^2 v)}} + n,\end{aligned}\quad (28b)$$

hol $y=0$, $v_1=-1$ összetartozó értékek behelyettesítéséből és az utolsó körméreti integrál kiszámításával

$$\begin{aligned}n &= \frac{2(a-1)}{a} F^1(\lambda) + \frac{2(1-a^2)}{a} \Pi^1(-a, \lambda) \\ &- \frac{\sqrt{1-a^2}}{\delta} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-2\delta^2) \right).\end{aligned}\quad (29a)$$

Az x -nek szélső értéke van $v_1=0$ -nál. Ez okból $v_1=0$ pontban, mely a szabad határ legmélyebb beszökésének a helye, $y=n$ és

$$x = \frac{2(1-a)}{a} \int_0^{-1} \frac{v dv}{(1-av)(v-1)\sqrt{1-\lambda^2 v^2}} = m,$$

A szabad határ e $v_1 = 0$ meghatározta legmélyebb beszökésének pontjában a koordináták

$$\begin{aligned}x &= m, \\y &= n,\end{aligned}$$

hol n a (29a) egyenlettel fölírt érték, és

$$\begin{aligned}m &= 2(1-a) \int_0^{-1} \frac{v dv}{(1-av)(v-1) \sqrt{1-\lambda^2 v^2}}, \\&= 2 \int_0^{\lambda} \left(\frac{1}{v+\lambda} - \frac{1}{av+\lambda} \right) \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}},\end{aligned}$$

vagyis

$$m = 2k l. \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{2k}{\delta} l. \frac{k(1+a)(ak+\delta)}{k^2(a+\lambda^2)+\delta}. \quad (29b)$$

A 7. ábrák esetén $a = \frac{3}{7}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, minélfogva $k^2 = \frac{9}{8}$,
 $\mu = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{2}{7}$, $c = 43.058$. A LEGENDRE tábláit fölhasználván,
találattatik

$$g = 23.272$$

$$h = 2.619;$$

továbbá

$$m = 0.269$$

$$n = 0.20.$$

A szabad határ alakját ez adatok mellett a (7c. ábra) a sugár kezdetén nagyított léptékben a (7d. ábra) mutatja.

A szabad határ aszimptotájának távolsága a szabad határ kezdőpontjától

$$y_A = \frac{4(a-1)}{a} F^1(\lambda) + \frac{4(1-a^2)}{a} \Pi^1(-a^2, \lambda). \quad (30)$$

Ellenőrzésül a számítás helyes volta iránt szolgál a

$$c = g + y_A + 2\pi$$

egyenlet, mely a (26a), (30) és $c = 2\pi a_0$ egyenletek folytán a következő alakban írható:

$$2\pi \left(a_0 - \frac{1}{\delta} \right) = 4 \left(\frac{1}{a} - a \right) \left(\Pi^1(-a^2) + \Pi^1 \left(-\frac{\lambda^2}{a^2} \right) - F^1 \right); \quad (31)$$

ez az egyenlet pedig identitásra vezet LEGENDRE «Traité des fonctions Tom. I. pag. 69»-en álló azon tétel folytán, hogy

$$\Pi^1(-a^2) + \Pi^1 \left(-\frac{\lambda^2}{a^2} \right) - F^1 = \frac{\pi}{2 \sqrt{(1-a^2) \left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2} \right)}}.$$

Ugyanis a (31) egyenlet jobb oldala (pag. 29. negyedik egyenlete folytán) így írható:

$$\frac{2\pi k \sqrt{1-a^2}}{\delta};$$

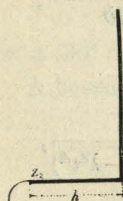
ámde (a pag. 30. szerint)

$$k \sqrt{1-a^2} = \frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1},$$

és (pag. 29. utolsó képlete értelmében) hasonlókép a (31) egyenlet bal oldalán

$$a_0 \delta - 1 = \frac{2a_0^2}{1+a_0^2} - 1 = \frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1}.$$

q. e. d.



XIII. Külön számítjuk ki az $a=\lambda$ speciális esetet, (8. ábra), a mely azzal van jellemezve, hogy $g=\infty$ lévén az áramban *gát* gyanánt csak a h beszögelő fal tekinthető. Ebben az esetben minden első és másodnemű LEGENDRE normál-integrálra redukálódik.

8. ábra.

Ugyanis ekkor a szabad határ egyenletei

$$x = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda} \int_{-1}^{v_1} \frac{v dv}{(1-\lambda v)(v-1)\sqrt{1-\lambda^2 v^2}},$$

$$y = \frac{2(\lambda-1)}{k} \int_{-1}^{v_1} \frac{\sqrt{1-v^2} dv}{(1-\lambda v)(v-1)\sqrt{1-\lambda^2 v^2}}.$$

A mi az utóbbit illeti, könnyű átalakítások után ered (28b-ből egyenesen)

$$y = -\frac{2(1-\lambda)}{k\lambda} F(\lambda, \vartheta) + \frac{2(1-\lambda^2)}{k\lambda} \Pi(-\lambda^2, \vartheta) - \frac{2(1-\lambda^2)}{k} \int_0^{v_1} \frac{v dv}{(1-\lambda^2 v^2) \sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} + n,$$

$$\text{hol } \sin \vartheta = v_1 = \frac{1}{v}.$$

Tekintetbe véve Legendre ezen tételét:

$$\Pi(-\lambda^2, \vartheta) = \frac{1}{1-\lambda^2} E(\vartheta) - \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\Delta \vartheta},$$

továbbá ez identitást:

$$\frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\frac{1-v^2}{1-\lambda^2 v^2}} = \frac{(\lambda^2-1)v}{(1-\lambda^2 v^2) \sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

lészen

$$y = n - \frac{2}{k} + \frac{2}{k} \frac{\cos \vartheta (1-\lambda \sin \vartheta)}{\Delta \vartheta} + \frac{2}{k\lambda} (E(\vartheta) - (1-\lambda) F(\vartheta)),$$

hol

$$n = -\frac{2(1-\lambda)}{k\lambda} F^1(\lambda) + \frac{2}{k\lambda} E^1(\lambda) + \frac{2}{k}.$$

Az x koordinátára nézve könnyen ered

$$x = \frac{2}{k\lambda} \int_{\lambda}^{v_1} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{1-v^2}} - \frac{2}{k} \int_{\lambda}^{v_1} \frac{dv}{(\lambda+v) \sqrt{1-v^2}},$$

honnét

$$x = \frac{2}{k\lambda} \left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} - \sqrt{\frac{1-\lambda v_1}{1+\lambda v_1}} \right) + 2k \cdot \frac{\lambda (\sqrt{(1+\lambda)(1+\lambda v_1)} + \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda v_1)})}{\sqrt{(1+\lambda)(1+\lambda v_1)} - \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda v_1)}}. \quad (30b)$$

A szabad határ beszökésének legmélyebben eső pontjában a koordináták ($v_1 = 0$ -ból folyólag)

$$x = 2l \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{2}{ak} \left(\frac{1}{k(1+a)} - 1 \right) = m,$$

$$y = \frac{2(1-\lambda)}{k\lambda} F^1(\lambda) + \frac{2}{k\lambda} E^1(\lambda) + \frac{2}{k} = n,$$

a mi a (29a) és (29b) képletekből $a = \lambda$ specializálás után is foly.

A szabad határ aszimptotájának távolsága a szabad határ kezdőpontjától

$$y_A = n - \frac{2}{k} + \frac{2}{k\lambda} (E^1(\lambda) - (1-\lambda) F^1(\lambda)),$$

azaz

$$y_A = \frac{4}{k\lambda} (E^1(\lambda) - (1-\lambda) F^1(\lambda)),$$

a mi a (30) egyenlettel megegyez.

A beszögelő fal hossza

$$h = 2 \frac{1-\lambda}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{(1+k \sqrt{1-v^2}) dv}{(1+v)(\lambda+v) \sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

melynek kiszámítását következőleg eszközöljük. Jelölve

$$h_1 = 2 \frac{1-\lambda}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{dv}{(1+v)(\lambda+v) \sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

$$h_2 = 2 \frac{1-\lambda}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{k \sqrt{1-v^2} dv}{(1+v)(\lambda+v) \sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

lészen

$$h = h_1 + h_2.$$

Ámde részlettörtekre való bontás útján kiadódik

$$h_1 = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda} + 2 \text{ l. } \lambda.$$

Más részről h_2 értéket így írva

$$h_2 = 2(1-\lambda) \int_{\lambda}^1 \frac{1-v}{\lambda+v} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(v^2-\lambda^2)}},$$

e következő szubstituczió után

$$v = \lambda \frac{1+\mu x^2}{1-\mu x^2}, \quad \mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

kiadódik:

$$h_2 = \frac{2\mu(1-\lambda)}{\lambda} \int_0^1 \frac{(1-x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu^2 x^2)}},$$

honnan

$$h_2 = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda} (E^1(\mu) - (1-\mu^2) F^1(\mu)).$$

XIV. Áttérünk a X. alatt vázolt II. eset rövid leírására.

A folyadék a végtelenből c szélességű csatornában áramlik egy derékszögben meggörbitett gát ellen, melynek egyik szára g hosszúságú, ($g > c$) merőleges a csatorna falaira, és ezek egyikének folytatását képezi, míg a derékszögű gát második szára végtelenségbe nyúlik, (9a, b, c. ábrák).

Itten is

$$s = 2\pi,$$

$$c = 2\pi a_0;$$

míg (X., (6) egyenlet)

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1+a)}{(a-v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}},$$

azaz

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1+a):k}{(a-v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}} = f(v)$$

differenciálegyenlet szabja meg az áramvonalakat. Ez okból most

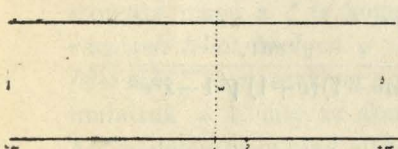
$$g = \frac{2(1+a)}{k} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{(1+k\sqrt{1-v^2}) dv}{(a-v)(1+v)\sqrt{\lambda^2-v^2}},$$

hol a négyzetgyökök szintén pozitív előjellel veendők.

A csatorna második falának vége a g gátfaltól t távolságra van, mely

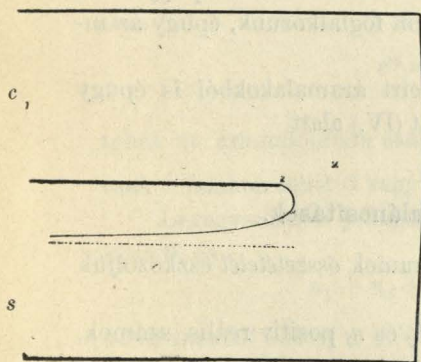
$$t = \int_{a-\varepsilon_1}^{\lambda} f(v) dv - \int_{a+\varepsilon_2}^1 f(v) dv$$

$$\lim. \varepsilon_1 = \lim. \varepsilon_2 = 0; \lim \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1.$$

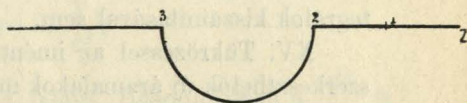


9a. ábra.

Ugyanis a végtelenben $\lim. \varphi = -\infty = \text{const.}$ mentén kell átszelni az áramot, mely okból a határátmenetnél a b) substituczióból folyólag (pag. 29)



9c. ábra.



9b. ábra.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (1-a)e^{\frac{\eta}{2}}.$$

Végül a szabad határ differenzálegyenletei:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2(1+a)}{k} \frac{1}{(a-v)(1+v)\sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

$$\frac{dy}{dv} = 2(1+a) \frac{v-1}{a-v} \frac{1}{\sqrt{(v^2-1)(v^2-\lambda^2)}},$$

$$1 \leq v^2 \leq \infty.$$

Ezeket transzformáljuk úgy, hogy v helyett $\frac{1}{v_1}$ -et hozunk be. Így lesz:

$$\frac{dx}{dv_1} = - \frac{2(1+a)}{k} \frac{v_1}{(av_1-1)(v_1+1) \sqrt{1-\lambda^2 v_1^2}},$$

$$\frac{dy}{dv_1} = 2(1+a) \frac{v_1-1}{av_1-1} \frac{1}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-\lambda^2 v_1^2)}}.$$

$$1 \geq v_1^2 \geq 0.$$

Ezeknek tekintetbe vételével a t kiszámítható így is:

$$t = \int_{-1+\varepsilon}^{-\lambda} f(v) dv + \frac{2(1+a)}{k} \int_{+1}^{-1+\varepsilon} \frac{v dv}{(av-1)(v+1) \sqrt{1-\lambda^2 v^2}}$$

hol $\lim \varepsilon = 0$.

A szabad határ beszökésének maximuma itt épügy határozatodik meg, mint előbb. Evvel nem foglalkozunk, épügy az integrálok kiszámításával sem.

XV. Tükrözéssel az imént leírt áramalakokból is épügy szerkeszthetők új áramalakok mint (IV.) alatt.

4. §. További általánosítások.

XVI. Bizonyos tekintetben áramok *összetételét* eszközöljük a következő módon:

Legyenek φ_j reális számok, k_j és n_j pozitív reális számok, és pedig $n_j < 1$;

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Legyenek továbbá

$$U_j = \frac{1+u_j}{1-u_j}; \quad u_j = k_j (e^{\varphi_j} - e^w)^{\frac{1}{n_j}}$$

$$\zeta = \prod_{j=1}^m U_j^{n_j},$$

hol a \prod szimbolum szorzást jelent.

Ha az egyes k_j számok nem kisebbek az egységnél, és az

egyes φ_j számok nem kisebbek 0-nál, akkor nyilvánvaló, hogy szabad határt is tartalmazó áramot nyerünk, ha a w -síknak $\psi=0$ és $\psi=h$ közötti szalagját a ζ képlet alapján képezzük le a z -síkra. A h úgy határozandó meg, hogy a w -sík szóban levő szalagjának belsejében ne legyen olyan pont, melyben a $\frac{dz}{dw}=0$ vagy $=\infty$.

Ugyanis az $U_j^{n_j}$ szorzók egyike se lévén abszolút értékére nézve <1 , maga ζ se <1 sehol sem. Továbbá pozitív és bizonyos elég nagy w_0 -nál nagyobb w esetén valamennyi u_j képzetes lévén, az U_j komplex egység, minélfogva mint az U_j -k szorzata maga a ζ is komplex egység. A $\psi=0$ egyenes azon részének tehát, melyen $\varphi > w_0$, az áramsíkon szabad határ felel meg; mert ezekben a pontokban a sebesség, miként megmutattuk $=1$, míg az áramidom belsejében mindenütt <1 . A ζ végtelen nagy csak ott lehet, hol

$$u_j = 1$$

azaz hol

$$e^w = e^{\varphi_j} = \frac{1}{k_j^2},$$

tehát az áramidomnak csak a falain. Hasonlóképpen a $\frac{dz}{dw}$ is csak a falakon lehet 0 vagy végtelen nagy.

Legegyszerűbb jellegű az áramlás akkor, ha valamennyi $\varphi_j = 0$, és

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = 1;$$

az áramsíkot ekkor a 13b. ábra tünteti föl; a gát-sokszög oldalának száma $=m$; a szögek nagyságát az n_j exponensek, az oldalakét az n_j és k_j -k értékei határozzák meg.

A sebesség $=0$ a sokszög mindegyik csúcspontjában és az egyes csúcspontok között folytonos módon változik (13a. ábra). Ép azért az átmenetel sokszögalakú gátról folytonos görbére nem eszközölhető.

1. Az összetevésre szolgáljon például

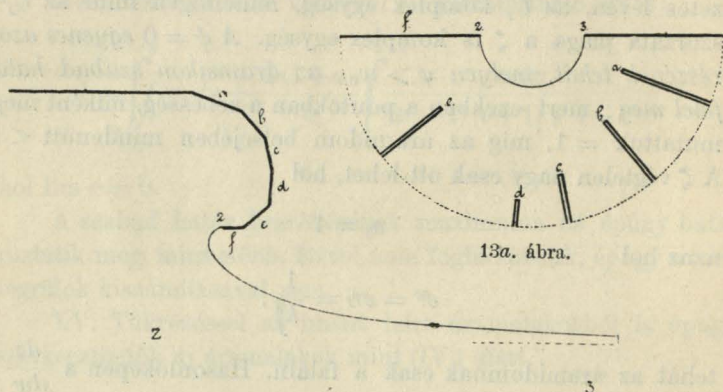
$$\zeta = \sqrt{\frac{1+k_1u}{1-k_1u}} \sqrt{\frac{1+k_2u}{1-k_2u}},$$

$$u = \sqrt{1-e^w}, k_1 > k_2 > 1$$

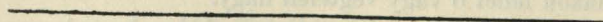
A w tartomány legyen a $\phi = 0$ és $\phi = \pi$ között elterülő parallelszalag. A

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{1+k_i u}{1-k_i u}}, \quad (i = 1, 2)$$

szerint erre a w tartományra leképeztetnek az 11a₁, 11a₂. ábrákon feltüntetett ζ_1 , ζ_2 tartományok. A kettő összetételéből ered a 7b. ábrán látható ζ tartomány. Egyébiránt a leképező formula és ennél fogva az áramlások is benne foglaltatnak az előbbi §-ban részletesen tárgyaltakban.



13a. ábra.



13b. ábra.

Ugyanis-e ζ így írható:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+k_1 k_2 - k_1 k_2 e^{w} + (k_1 + k_2) \sqrt{1-e^{w}}}{1+k_1 k_2 - k_1 k_2 e^{w} - (k_1 + k_2) \sqrt{1-e^{w}}}};$$

míg az idézett helyen alkalmazott ζ a $\beta = \delta = -1$ speciális esetben könnyű átalakítás után így szól:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\gamma - e^{\frac{w}{2}} + k(\gamma - a) \sqrt{2} \sqrt{\frac{a+\gamma}{2} - e^{\frac{w}{2}}}}{\gamma - e^{\frac{w}{2}} - k(\gamma - a) \sqrt{2} \sqrt{\frac{a+\gamma}{2} - e^{\frac{w}{2}}}}}.$$

Ez a két ζ azonossá lesz, ha w helyébe $\frac{w}{2}$ iratik, és

$$\frac{1+k_1k_2}{k_1k_2} = \gamma,$$

$$\frac{k_1+k_2}{k_1k_2} = k(\gamma-a)\sqrt{2},$$

$$1 = \frac{a+\gamma}{2},$$

azaz

$$\frac{1}{k_1k_2} = \gamma-1,$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2\sqrt{2}k(\gamma-1);$$

tehát $\frac{1}{k_i}$ quadratikus egyenlet gyökei; ugyanis

$$\frac{1}{k_i} = (\gamma-1)(k\sqrt{2} \pm \sqrt{2k^2-(\gamma-1)^{-1}}).$$

Az I. esetben ($a > 1$)

$$\gamma-1 = \frac{1-a}{1+a} < 0,$$

a II. esetben pedig ($a < 1$)

$$\gamma-1 = \frac{1+a}{1-a} > 0.$$

Látni való, hogy k_1 és k_2 az I. esetben lehetnek komplexek is, és megtörténhetik az is, hogy közülük az egyik > 1 , a másik < 1 .

2. Három ζ_i szorzó esetén

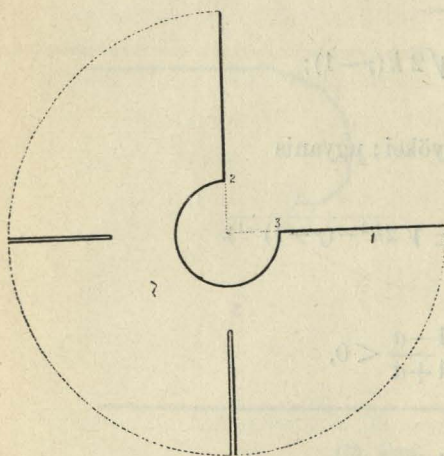
$$\zeta = \sqrt{\frac{1+k_1u}{1-k_1u} \cdot \frac{1+k_2u}{1-k_2u} \cdot \frac{1+k_3u}{1-k_3u}}, \quad u = \sqrt{1-e^w}.$$

Ha $k_1 > k_2 > k_3 > 1$, akkor speczialesetben a ζ tartományt, mely a π szélességű w parallelszalag képe, a 10a. ábra mutatja, és az áramlást mutatja e speczialesetben a 10b. ábra.

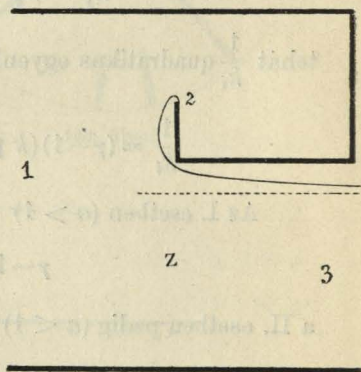
Hogy ζ és u egymásra egyértékűleg vonatkoznak, az abból következik, hogy $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$ csak határpontokon lesz 0 és ∞ ; ugyanis

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\zeta}{2} \left(\frac{k_1}{1-k_1^2 u^2} + \frac{k_2}{1-k_2^2 u^2} + \frac{k_3}{1-k_3^2 u^2} \right),$$

mely mennyiség végtelen nagy, a midőn az $(1-k_j u)$ -k bármelyike $=0$, hol egyszersmind ζ is $=\infty$, továbbá $\frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0$ két pontban, melyek a ζ visszaforduló határpontjainak felelnek meg.



10a. ábra.



10b. ábra.

Az áramlás közelebbi meghatározása hyperelliptikus integrállal eszközölhető.

Folytatólag jövünk többszörösen megtört falak mentén haladó áramlásokra, melyek szintén hyperelliptikus integrálokkal határozhatók meg. Ugyanilyen jellegű áramlásokra általánosan vezet ez a képlet:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+a_1 u+a_2 u^2+a_3 u^3+\dots+a_n u^n}{1-a_1 u+a_2 u^2-a_3 u^3+\dots+(-1)^n a_n u^n}},$$

$$u = \sqrt{1-e^w}.$$

3. Hyperelliptikus integrálokkal írható le a (XVI.) alatti részletezett ζ idomnak megfelelő áramlás, hacsak

$$n_1 = n_2 = \dots = n_m = \frac{1}{2}.$$

Itt csak azon eset leírásával foglalkozunk közelebb, a midőn a szorzók száma $= 2$ lévén, a leírás elliptikus integrálokkal eszközölhető. Valójában, ha

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+k_1 u_1}{1-k_1 u_1}} \sqrt{\frac{1+k_2 u_2}{1-k_2 u_2}},$$

$$u_1 = \sqrt{e^{\varphi_1} - e^w}; u_2 = \sqrt{e^{\varphi_2} - e^w},$$

akkor

$$u = e^w, \quad a_1 = e^{\varphi_1}, \quad a_2 = e^{\varphi_2}$$

jelölés mellett, lészen

$$\frac{dz}{du} = \frac{(1+k_1 \sqrt{a_1-u})(1+k_2 \sqrt{a_2-u})}{\sqrt{(1-k_1^2(a_1-u))(1-k_2^2(a_2-u))}} \frac{1}{u}.$$

Ez áramlásokat közelebb jellemezzük azon speciális esetben, a midőn k_i és φ_i reálisok, és pedig

$$k_1 > k_2 \geq 1; \quad \varphi_1 > \varphi_2.$$

A

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{1+k_i u_i}{1-k_i u_i}}; \quad (i = 1, 2)$$

tartományai legyenek ugyanazok, mint (4. és 17.) lapokon azzal a különbséggel, hogy a $\zeta = 1$ pont nem $w = 0$ -nak, hanem $w = \varphi_i$ -nek felel meg. (11a₁, 11a₂; vagy 12a₁, 12a₂. ábrák.)

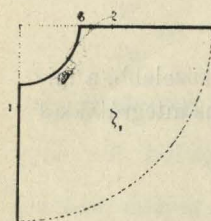
A míg $\phi = 0$ és $\varphi < \varphi_2$, a w szalag alsó határvonalának ugyanaz a képe a ζ síkon, mint az imént leírt 1. példában; ellenben

$$\varphi_1 > \varphi > \varphi_2$$

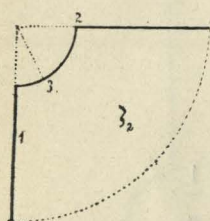
intervallumban a ζ_2 már komplex egység, míg a ζ_1 -re nézve két eset lehetséges: a ζ_1 vagy reális pozitív az egész intervallumban, vagy pedig az intervallum első részében még képzetes.

Az első esetben a ζ és z idom vázlatait a 11b. és 11c. ábrák mutatják; a második esetben a 12b. és 12c. ábrák; az

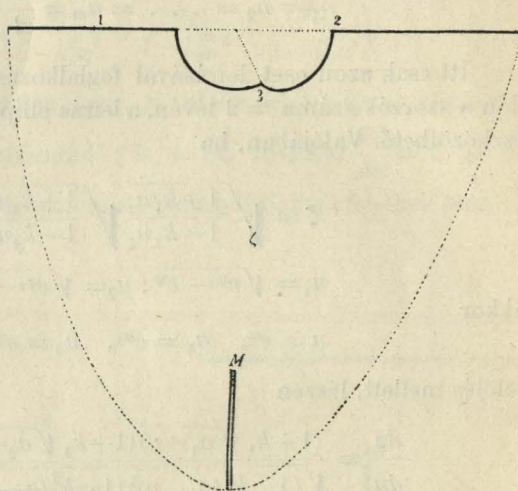
utóbbi esetben a ζ ábrán a két nem köralakú görbe határnak közös az aszimptotája.



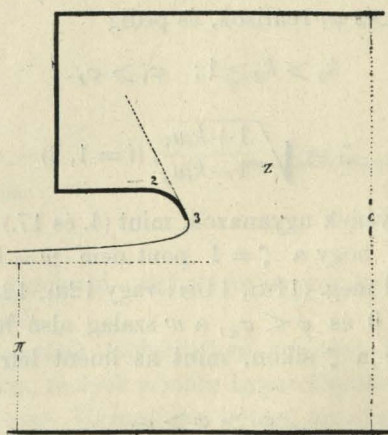
11a1. ábra.



11a2. ábra.



11b. ábra.

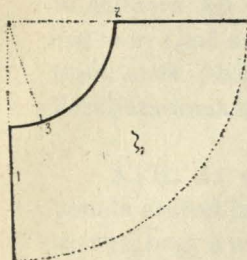


11c. ábra.

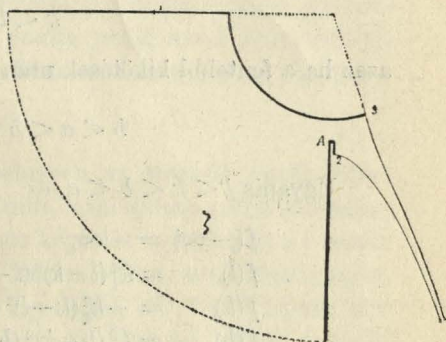
Könnyű számítás igazolja, hogy azokon a pontokon kívül, melyekben a ζ maga 0 vagy ∞ , szingularitások még azokban a pontokban vannak, a melyekben

$$k_2(1-k_1^2u_1^2)u_1+k_1(1-k_2^2u_2^2)u_2=0;$$

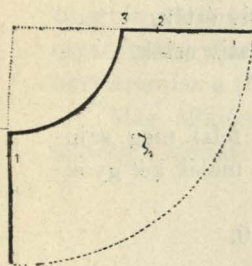
e pontokban ugyanis $\frac{d\zeta}{dw}=0$.



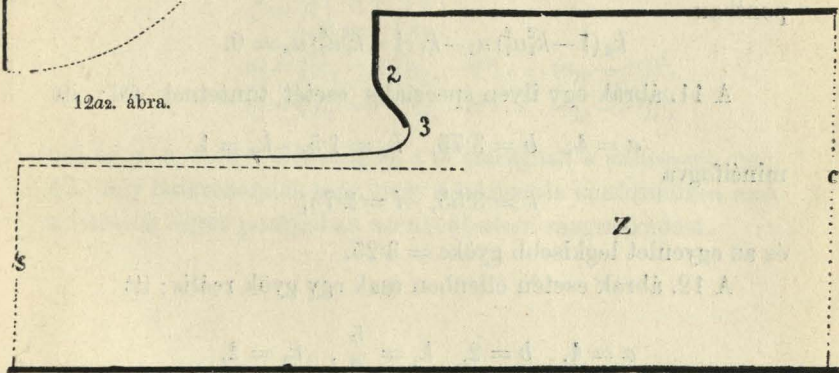
12a1. ábra.



12b. ábra.



12a2. ábra.



12c. ábra.

Jelöltessék

$$e^w=u, \quad k=e^{q_1}-\frac{1}{k_1^2}, \quad l=e^{q_2}-\frac{1}{k_2^2}, \quad e^{q_1}=a, \quad e^{q_2}=b;$$

akkor ez egyenletet az irracionálisok eltávolítása után a következő alakban írhatjuk:

$$f(u) = k_1^2(u-k)^2(u-a) - k_2^2(u-l)^2(u-b) = 0.$$

Ennek az egyenletnek csupa reális gyökei vannak, ha

$$k < b,$$

azaz ha a fentebbi kikötések után még

$$b < a < b + \frac{1}{k_1^2}.$$

Ugyanis $l < k < b < a$, és

$$\begin{aligned} f(-\infty) &= -\infty, \\ f(l) &= k_1^2(l-k)^2(l-a) = \text{negatív érték}, \\ f(k) &= -k_2^2(k-l)^2(k-b) = \text{pozitív érték}, \\ f(b) &= k_1^2(b-k)^2(b-a) = \text{negatív érték}, \\ f(a) &= -k_2^2(a-l)^2(a-b) = \text{negatív érték}, \\ f(\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

De e gyökök közül csak a legkisebbnek felel meg szingularitás a mi leképezésünk határain; míg a másik két gyök-pontban

$$k_2(1 - k_1^2 u_1^2) u_1 - k_1(1 - k_2^2 u_2^2) u_2 = 0.$$

A 11. ábrák egy ilyen speciális esetet tüntetnek föl; itt

$$a = 4, \quad b = 3.75, \quad k_1 = 1.5, \quad k_2 = 1$$

minélfogva

$$k = 3.55, \quad l = 2.75,$$

és az egyenlet legkisebb gyöke $= 3.25$.

A 12. ábrák esetén ellenben csak egy gyök reális; itt

$$a = 4, \quad b = 2, \quad k_1 = \frac{5}{2}, \quad k_2 = 2,$$

minélfogva

$$k = 3.84, \quad l = 1.75,$$

tehát

$$k > b.$$

A reális gyöknek a ζ idomnak A szinguláris határpontja felel meg. A többi komplex gyökök egyikének sincsen a képe a

mi ζ idomunk területén, a mely $0 < \psi < \pi$ szalagnak a képe. Ugyanis *mind a kettő* azért nem fekszik rajta, mert az u_1 és u_2 gyökök konjugált értékek és másrésről

$$u = e^w,$$

minélfogva két gyöknek megfelelő ψ értékek közötti különbség $= \pi$. *Csak az egyik* gyök pontja pedig azért nem fekszik rajta, mert ζ -határ körüljárásának az iránya egyez a w -határ körüljárásának az irányával.

XVII. Az eddig leírt esetekben az áramsik egyik határvonala szabad határban végződött, a mi annak volt a következménye, hogy a $w = +\infty$ ponthoz képzetes u_j tartozott a j mindegyik értékénél. E speciális összetartozást megszüntethetjük, ha ζ képletekben e^w helyett ugyancsak az e^w -nek lineár tört függvényét hozzuk be (2. §. pag. 11). Az így nyert áramsik olyan viszonyban lesz az eddig tárgyaltakhoz, mint a (2. §.)-ban leírt áramlás a (1. §.)-ban leírotthoz.

Még általánosabb áramlásokhoz jutunk, ha e leképezést fektetjük alapol:

$$\zeta = \prod_{j=1}^m \left(\frac{u_j + k_j v_j}{u_j - k_j v_j} \right)^{n_j},$$

$$u_j = ((a_\gamma - e^w)(a_{j_2} - e^w) \dots (a_{j_p} - e^w))^{\frac{1}{2}},$$

$$v_j = ((b_\gamma - e^w)(b_{j_2} - e^w) \dots (b_{j_q} - e^w))^{\frac{1}{2}},$$

hol az a , b , k és n állandók és a w szalagnak a szélessége (pag. 43.) úgy határozandók meg, hogy a leképezés konformitása csak a határok egyes pontjaiban szenvedhessen megszakadást.

szeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő*. A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól*. Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkal. *Konkoly Miklóstól*. — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától*. — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól*. Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól*. — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól*. — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól*. — VIII. szám. Új villámzáro vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól*. Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól*. — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendű partialis differentialegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától*. — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól*. Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendű felületről. *Hunyady Jenőtől*.

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől*. — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leírása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől*. — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól*. — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól*. — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól*. — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól*. — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországon megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótlól*. — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől*. — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól*. — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól*. — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától*.

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól*. — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. a) A Wells-üstökös szinképe. b) A szeptemberi nagy üstökös szinképe. c) 9 Meteor szinképe. d) 115 állócsillag spectruma. e) Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól*. — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól*. — IV. Egy új reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól*. — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlítva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól*. — VII. Egy új szerkezetű spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől*. — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól*. — X. Egy új spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől*. — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy

táblával.) I. rész. a) γ Cassiopejæ spectruma. b) α Ursæ minoris spectruma. c) A Swift üstökös spectruma. d) A Brooks üstökös spectruma. e) Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhidrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 könyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880–1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hünigler Adolfotól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámítása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radóttól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával.) *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *König Gyulától.* — II. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. *Hunyady Jenőtől.* — III. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. (Folytatása az előbbinek.) *Hunyady Jenőtől.* — IV. A lánczhidak merevítő tartóinak grafikai elméletéről. *Khernál Antaltól.* — V. Együttesen lengő elemi mágnesek kölcsönös vonzásai és taszításai. *Fröhlich Izidortól.*

Tizenötödik kötet.

I. A vasutak jövedelmezőségéről, kapcsolatban a tarifák kérdésével. *Kisfaludi Lipthay Sándortól.* — II. A Nova aurigæ spectruma, összehasonlítva néhány bolygószerű kód spectrumával. *Gothard Jenőtől.* — III. Az Ampère-féle elemi törvények æquivalenceinek meghatározása. *Farkas Gyulától.* —